

ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

І.Г. Завізіон

Одержана умова існування і єдиності періодичного розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра. Використовуючи системи інтегро-диференціальних рівнянь з параметром будуються збіжні періодичні ітерації. Подаються оцінки швидкості збіжності розв'язку і точного розв'язку систем.

We obtain conditions for existence and uniqueness of periodic solution system integro-differential Volterra's equations. By using system integro-differential equations with parameter converged periodic iterations are constructed. Estimates of the speed of convergence of solution and sharp solution of system are given.

Вступ.

В працях [1-4] розроблені методи конструктивного аналізу періодичних розв'язків різних класів лінійних та нелінійних систем диференціальних рівнянь. На основі запропонованих ідей, в [5] одержані достатні умови існування та єдиності, стійкості періодичних розв'язків та вказані конструктивні методи побудови періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь, які зручні для практичного застосування. Методи розроблені в [5] застосовують в [6] до знаходження періодичних розв'язків лінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь, а також в [7] до слабонелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом, у випадку коли межі інтегрування періодичні функції. Коли ж межі інтегрування не є періодичними функціями, система інтегро-диференціальних рівнянь не завжди має періодичний розв'язок. Тому в даній статті знаходяться необхідні і достатні умови існування і єдиності періодичних розв'язків лінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь, коли межі інтегрування не періодичні функції.

Використовуючи результати [5], про застосування матричної функції $(E - B(t))^{-1}$ для дослідження лінійних диференціальних рівнянь, в статті пропонується підхід до побудови періодичних розв'язків лінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь. За допомогою інтегро-диференціальних рівнянь з параметром побудоване аналітичне представлення періодичних розв'язків.

Існування та єдиність періодичного розв'язку.

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = Q(t)x + f(t) + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds, \quad (1)$$

де $n \times n$ матриця $Q(t)$, вектор $f(t)$, $n \times n$ матриця $\bar{\Gamma}(t,s)$ неперервні і ω -періодичні по змінним t і s .

Знайдемо умову існування періодичних періоду ω розв'язків рівняння (1).

Нехай $x(t)$ задовольняє рівняння (1), тоді

$$\frac{dx(t)}{dt} = Q(t)x(t) + f(t) + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds.$$

Замінивши в цій рівності t на $t + \omega$ маємо

$$\frac{dx(t+\omega)}{dt} = Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{t+\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds.$$

Запишемо рівняння (1), якщо $x(t + \omega)$ є його коренем. Для цього замінемо $x(t)$ на $x(t + \omega)$

$$\frac{dx(t+\omega)}{dt} = Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{t+\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds.$$

Доведемо, що останні дві рівності рівні. Для цього ввівши заміну $s = s_1 + \omega$, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dx(t+\omega)}{dt} &= Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{t+\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds = \\ &= Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_{-\omega}^t \bar{\Gamma}(t,s_1)x(s_1+\omega)ds_1 = \\ &= Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_{-\omega}^0 \bar{\Gamma}(t,s_1)x(s_1+\omega)ds_1 + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s_1)x(s_1+\omega)ds_1 = \\ &= Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds. \end{aligned}$$

Отже $x(t)$ та $x(t + \omega)$ є розв'язками інтегро-диференціального рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^{\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds = \\ = Q(t)x(t+\omega) + f(t) + \int_0^t \bar{\Gamma}(t,s)x(s+\omega)ds. \end{aligned}$$

Звідси маємо, що $x(t + \omega)$ є розв'язком рівняння (1) якщо виконується наступна умова

$$\int_0^{\omega} \bar{\Gamma}(t,s)x(s)ds = 0. \quad (2)$$

Нехай $B(\omega) = 0$, де $B(t) = \int_0^t Q(\tau)d\tau$, $B(t + \omega) = B(t)$ і $\det\|E - B(t)\| \neq 0, \forall t \in R$, якщо

$\beta\omega < 1$, де $\beta = \max_{0 \leq t \leq \omega} \|Q(t)\|$, E – одинична матриця. Зробимо в (1) заміну

$$x = (E - B(t))^{-1} y.$$

Тоді отримаєм систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + g(t) + \int_0^t \Gamma(t,s)y(s)ds, \quad (3)$$

де $A(t) = -B(t)Q(t)(E - B(t))^{-1}$, $\Gamma(t,s) = (E - B(t))\bar{\Gamma}(t,s)(E - B(t))^{-1}$, $g(t) = (E - B(t))f(t)$.

Записавши до (3) еквівалентне інтегральне рівняння і скориставшись умовою ω -періодичності $y(t)$ маємо

$$\int_0^\omega A(\tau)y(\tau)d\tau = -\int_0^\omega g(\tau)d\tau - \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s)ds. \quad (4)$$

Проінтегрувавши ліву частину (4) за частинами маємо

$$\int_0^\omega A(\tau)y(\tau)d\tau = \Phi(\omega)y(t) - \int_0^t \Phi(\tau)y(\tau)d\tau + \int_t^\omega \Phi_1(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau. \quad (5)$$

де $\Phi(\tau) = \int_0^\tau A(\tau)d\tau$, $\Phi_1(t) = \int_t^\omega A(\tau)d\tau$, $\dot{y}(t) \equiv \frac{dy(t)}{dt}$.

Підставляючи (5) в (4) і враховуючи (3) отримаємо наступне рівняння

$$y(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)(A(\tau)y(\tau) + g(\tau))d\tau + \int_0^\omega K(t,\tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s)ds - \\ - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)g(\tau)d\tau - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)y(s)ds, \quad (6)$$

де $K(t,\tau) = \begin{cases} \Phi^{-1}(\omega)\Phi(\tau), & \text{при } 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ \Phi^{-1}(\omega)\Phi_1(\tau), & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \leq \omega. \end{cases}$

Позначимо

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, j = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \max_{s,t} \|\Gamma(t,s)\| = \Gamma,$$

$$\|y\| = \max_t \|y(t)\|, q = j\omega^2 \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha\omega\Gamma}{3} + \frac{\Gamma}{2} \right).$$

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови

$$1) \quad q < 1, \quad (7)$$

$$2) \quad \int_0^\omega \bar{\Gamma}(t,s)(E - B(t))^{-1}y(s)ds = 0, \quad (8)$$

Тоді система (3) має єдиний ω -періодичний розв'язок.

Доведення. Рівняння (6) одержано з умови періодичності рівняння (3). Тому, якщо рівняння (6) буде мати єдиний розв'язок, то цей розв'язок буде періодичним. Запишемо (6) у вигляді $y = Ry$, де R – інтегральний оператор в (6). Тоді

$$Ry(t) - Rz(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)A(\tau)(y(\tau) - z(\tau))d\tau + \int_0^\omega K(t,\tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)(y(s) - \\ - z(s))ds - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau,s)(y(s) - z(s))ds.$$

Скориставшись останньою рівністю оцінимо норму

$$\|Ry - Rz\| \leq (\alpha \max_{t \in [0; \omega]} \int_0^{\omega} \|K(t, \tau)\| d\tau + \Gamma \max_{t \in [0; \omega]} \int_0^{\omega} \tau \|K(t, \tau)\| d\tau + \frac{j\omega^2 \Gamma}{2}) \max_t \|y(t) - z(t)\|.$$

Оцінимо такі інтеграли

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0; \omega]} \int_0^{\omega} \|K(t, \tau)\| d\tau &= \max_{t \in [0; \omega]} \left(\int_0^t \|K(t, \tau)\| d\tau + \int_t^{\omega} \|K(t, \tau)\| d\tau \right) \leq \\ &\leq j \max_{t \in [0; \omega]} \left(\int_0^t \|\Phi(\tau)\| d\tau + \int_t^{\omega} \|\Phi_1(\tau)\| d\tau \right) \leq j\alpha \max_{t \in [0; \omega]} \left(t^2 + \frac{\omega^2}{2} - t\omega \right) = \frac{j\alpha\omega^2}{2}, \\ \max_{t \in [0; \omega]} \int_0^{\omega} \tau \|K(t, \tau)\| d\tau &= \max_{t \in [0; \omega]} \left(\int_0^t \tau \|K(t, \tau)\| d\tau + \int_t^{\omega} \tau \|K(t, \tau)\| d\tau \right) \leq \\ &\leq j\alpha \max_{t \in [0; \omega]} \left(\frac{2t^3}{3} + \frac{\omega^3}{6} - \frac{\omega t^2}{2} \right) = \frac{j\alpha\omega^3}{3}. \end{aligned}$$

Використовуючи попередні оцінки маємо

$$\|Ry - Rz\| \leq q \|y - z\|. \quad (9)$$

З (7), (9), умови існування періодичного розв'язку (8) та принципу стиснутих відображень слідує існування єдиного розв'язку рівняння (6).

Побудова періодичного розв'язку системи з параметром. Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь з параметром

$$\frac{dy}{dt} = \lambda A(t)y + \lambda \int_0^{\tau} \Gamma(t, s)y(s, \lambda) ds + g(t). \quad (10)$$

Інтегральне рівняння еквівалентне (10) має вигляд

$$y(t, \lambda) = y(0, \lambda) + \lambda \int_0^t A(\tau)y(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^t g(\tau) d\tau + \lambda \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda) ds. \quad (11)$$

Підставляючи в (11) $t = \omega$ і із ω -періодичності функції $y(t, \lambda)$ маємо

$$\lambda \int_0^{\omega} A(\tau)y(\tau, \lambda) d\tau = - \int_0^{\omega} g(\tau) d\tau - \lambda \int_0^{\omega} d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda) ds. \quad (12)$$

Підставивши (5) в (12) та спростивши одержимо

$$\begin{aligned} y(t, \lambda) &= \int_0^{\omega} K(t, \tau)(\lambda A(\tau)y(\tau, \lambda) + g(\tau)) d\tau + \lambda \int_0^{\omega} K(t, \tau) d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda) ds - \\ &- \frac{1}{\lambda} \int_0^{\omega} \Phi^{-1}(\omega) g(\tau) d\tau - \int_0^{\omega} \Phi^{-1}(\omega) d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (13) у вигляді

$$y(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} y_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k(t). \quad (14)$$

Застосовуючи до рівняння (13) метод малого параметра, одержимо

$$y_{-1}(t) = - \int_0^{\omega} \Phi^{-1}(\omega) g(\tau) d\tau - \Phi^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s)y_{-1}(s) ds, \quad (15)$$

$$y_0(t) = \int_0^{\omega} K(t, \tau) (A(\tau)y_{-1} + g(\tau)) d\tau + \int_0^{\omega} K(t, \tau) d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s) y_{-1}(s) ds - \\ - \int_0^{\omega} \Phi^{-1}(\omega) d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s) y_0(s) ds, \quad (16)$$

$$y_k(t) = \int_0^{\omega} K(t, \tau) A(\tau) y_{k-1}(\tau) d\tau + \int_0^{\omega} K(t, \tau) d\tau \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, s) y_{k-1}(s) ds - \\ - \int_0^{\omega} \Phi^{-1}(\omega) d\tau \int_0^{\tau} y_k(s) ds, k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Скориставшись раніше приведеними оцінками інтегралів оцінемо формулу (17)

$$\|y_k\| \leq \bar{q} \|y_{k-1}\|, \quad (18)$$

$$\text{де } \bar{q} = \frac{q - \frac{j\Gamma\omega^2}{2}}{1 - \frac{j\Gamma\omega^2}{2}}.$$

З (17) маємо

$$\|y_k\| \leq \bar{q}^k \|y_0\|, k = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Ряд (14) буде збіжним, коли

$$0 < |\lambda| < \frac{1}{\bar{q}}.$$

(20)

Врахувавши (7), маємо $\frac{1}{q} > 1$. Отже $\lambda = 1$ задовольняє нерівність (20).

Поклавши $\lambda = 1$ в (14), отримаємо збіжний ряд

$$y(t) = y(t, 1) = y_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t), \quad (21)$$

де $y_{-1}(t), y_k(t) (k = 1, 2, \dots)$ – ω – періодичні функції. Знайдемо оцінку збіжності ряду (21) і точного розв'язку рівняння (3).

$$\|y(t) - \bar{y}_m(t)\| \leq \frac{\bar{q}^{m+1} \|y_0\|}{1 - \bar{q}}, \\ \|y(t)\| \leq \|y_{-1}\| + \frac{\|y_0\|}{1 - \bar{q}},$$

де $\bar{y}_m(t) = y_{-1} + \sum_{k=0}^m y_k(t)$. Тоді для рівняння (1) має місце оцінка

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{(1 - \beta\omega)} (\|y_{-1}\| + \frac{\|y_0\|}{1 - \bar{q}}), \quad (22) \\ \|x - x_m\| \leq \frac{\bar{q}^{m+1} \|y_0\|}{(1 - \bar{q})(1 - \beta\omega)}.$$

Вірною є теорема.

Теорема 2. Нехай виконується умова (2) існування періодичного розв'язку системи (1) і неперервність (7). Тоді ω -періодичний розв'язок системи (1) має вигляд

$$x = (E - B(t))^{-1} y, \quad (23)$$

де $y(t)$ визначається за формулами (17), (21) і справедливі оцінки (22). Періодичний розв'язок $y(t, \lambda)$ інтегро-диференціального рівняння з параметром (10) при $\lambda \rightarrow 0$ прямує до періодичного розв'язку відповідного незбуреного диференціального рівняння.

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь з параметром іншого вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \lambda A(t)y + \lambda^2 \int_0^\tau \Gamma(t, s)y(s, \lambda)ds + g(t). \quad (24)$$

Записавши до (24) еквівалентне інтегральне рівняння та скориставшись ω -періодичністю розв'язку рівняння (24), а потім проінтегрувавши за частинами інтеграли в одержаній рівності маємо

$$\begin{aligned} y(t, \lambda) = & \int_0^\omega K(t, \tau)(\lambda A(\tau)y(\tau, \lambda) + g(\tau))d\tau + \lambda^2 \int_0^\omega K(t, \tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda)ds - \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)g(\tau)d\tau - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y(s, \lambda)ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Розв'язок рівняння (25) будемо шукати у вигляді (14). Підставивши (14) в (25) і застосувавши метод малого параметра отримаємо

$$y_{-1}(t) = -\Phi^{-1}(\omega) \int_0^\omega g(\tau)d\tau, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} y_0(t) = & \int_0^\omega K(t, \tau)A(\tau)y_{-1}(\tau)d\tau + \int_0^\omega K(t, \tau)g(\tau)d\tau - \\ & - \int_0^\omega \Phi^{-1}(\omega)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y_{-1}(s)ds, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} y_k(t) = & \int_0^\omega K(t, \tau)A(\tau)y_{k-1}(\tau)d\tau + \int_0^\omega K(t, \tau)d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y_{k-2}(s)ds - \\ & - \Phi^{-1}(\omega) \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau \Gamma(\tau, s)y_{k-1}(s)ds, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Дослідимо на збіжність ряд (14), де $y_{-1}, y_k, k = 0, 1, \dots$ визначаються за формулами (26) – (28). Оцінюючи рівність (28) прийдемо до такої рекурентної нерівності

$$\|y_k\| \leq q_1 \|y_{k-1}\| + q_2 \|y_{k-2}\|, \quad (29)$$

де $q_1 = \frac{\alpha^2 j \omega^2}{2} + \frac{j \Gamma \omega^2}{2}, q_2 = \frac{\Gamma j \alpha \omega^3}{3}$. Використовуючи (29) можна показати, що досліджуваний ряд буде збіжний, при виконанні наступної нерівності

$$|\lambda|q_1 + |\lambda|^2 q_2 < 1.$$

Звідси $0 < |\lambda| < [\frac{-q_1 + \sqrt{q_1 + 4q_2}}{2q_2}] = \lambda_0 > 1$. Покладемо в (14) $\lambda = 1$, отримаємо ω -періодичний розв'язок (21) системи (3). З (29) справедлива нерівність

$$\|y_{k+1}\| \leq a_1 \mu_1^k + a_2 \mu_2^k, \quad (30)$$

$$\text{де } \mu_{1,2} = \frac{q_1}{2} \pm \sqrt{\frac{q_1}{4} + q_2}, a_1 = \frac{\|y_{-1}\| \mu_2 - \|y_0\|}{\mu_2 - \mu_1}, a_2 = \frac{\|y_{-1}\| \mu_1 - \|y_0\|}{\mu_1 - \mu_2}.$$

З нерівності (30) знайдемо оцінку швидкості збіжності ряду (21) і точного розв'язку рівняння (3):

$$\|y - \bar{y}_m(t)\| \leq \frac{a_1 \mu_1^m}{1 - \mu_1} + \frac{a_2 \mu_2^m}{1 - \mu_2}, \|y\| \leq \|y_{-1}\| + \|y_0\| + \frac{a_1}{1 - \mu_1} + \frac{a_2}{1 - \mu_2}. \quad (31)$$

Тоді оцінка для рівняння (1) буде така:

$$\|x\| \leq \frac{1}{1 - \beta \omega} (\|y_{-1}\| + \|y_0\| + \frac{a_1}{1 - \mu_1} + \frac{a_2}{1 - \mu_2}),$$

$$\|x - \bar{x}_m\| \leq \frac{1}{1 - \beta \omega} (\frac{a_1 \mu_1^m}{1 - \mu_1} + \frac{a_2 \mu_2^m}{1 - \mu_2}). \quad (32)$$

Вірною є теорема.

Теорема 3.

Нехай виконується умова (2) існування періодичного розв'язку системи (1) і нерівність (7). Тоді ω -періодичний розв'язок системи (1) має вид (23) та (21), де $y_k(t), k = -1, 0, 1, \dots$ визначаються за формулами (26) – (28). Оцінки швидкості збіжності і точного розв'язку системи (1) має вид (32).

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М. Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. – 1991. – № 9. – С. 1516 – 1521.
2. Самойленко А.М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем дифференциальных уравнений I. II // Укр. мат. журн. – 1965. – 17, № 4. – С. 82 – 93.
3. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. 270 с.
4. Лаптинский В.Н. К вопросу о построении периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1983. – 19, № 8. – С. 1335 – 1343.
5. Самойленко А.М., Лаптинский В.Н., Кенжебаев К.К. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 220 с.
6. Завізіон Г.В. Періодичні розв'язки системи інтегро-диференціальних рівнянь // Наукові вісті. – 2005. – № 5. – С. 143 – 146.
7. Шкиль Н.И., Зивизион Г.В., Самойленко М.В. Периодические решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Нелінійні коливання. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 553 – 573.